Решения задач демонстрационного варианта и критерии начисления баллов

Задача 1

Докажите, что
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{1+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Решение

Рассмотрим сумму
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}\cdot\frac{1}{n}.$$
Данная сумма является интегральной суммой для определенного интеграла
$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$
где разбиение отрезка $[0,1]$ происходит точками $x_k=k/n$, $k=1,\dots,n$.

Поскольку функция $1/(1+x^2)$ непрерывна, то интегральная сумма S_n стремится к величине интеграла $I=\pi/4$, что и требовалось доказать.

Критерии

0-2 – Абитуриентом предприняты попытки решения задачи.

3-5 – Приведено решение, но оно не верно или не достаточно объяснено. Например, абитуриента предложил оценить представленную сумму интегралом, но оценка проведена неверно.

6-7 – Правильное решение, но допущены неточности в обосновании решения. Например, отсутствует пояснение о сходимости данной суммы к соответствующему определенному интегралу.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках или неточностях.

Задача 2

Является ли граф G, заданный матрицей инцидентности,
$$\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

a. эйлеровым

b. гамильтоновым?

Решение

a.) Согласно теореме Эйлера граф эйлеров (или, говоря иначе, содержит эйлеров цикл) тогда и только тогда когда этот граф связный и все его вершины имеют четную степень. Легко увидеть, что в приведенном в задаче графе второе условие нарушено - в нем есть вершины нечетной степени (в действительности все вершины этого графа имеют степень 3). Следовательно граф G не является эйлеровым

b.) Согласно теореме Дирака граф гамильтонов (или, говоря иначе, содержит гамильтонов цикл) если $n > 3$ (где n – число вершин графа) и $\upsilon \geq n/2$(где υ–минимальная степень вершины) Нетрудно проверить, что оба условия в рассматриваемом случае выполняются.Следовательно граф G – гамильтонов

Критерии

Каждый пункт оценивается не более чем на 5 баллов
0-3 – Предприняты попытки решения задачи, не приведшие к результату, или верный ответ без достаточного обоснования
4-5 – Верное решение (любое) с незначительными недостатками

Задача 3

Случайная величина x распределена равномерно на $[0, A]$ $(A > 1)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины

$$y = \min(x^2, x)$$

Решение

$$y = \begin{cases} x & x \leq x^2 \\ x^2 & x \geq x^2 \end{cases}$$

или с учетом области определения функции плотности вероятности

$$y = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x & 1 \geq x \geq A \end{cases}$$

Математическое ожидание функции $y = \phi(x)$ непрерывной случайной величины x есть

$$\mathbf{E}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)\, dx$$

в рассматриваемом случае

$$\mathbf{E}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)\, dx = \frac{1}{A}\left(\int\limits_{0}^{1} x^2 dx + \int\limits_{1}^{A} x dx\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{A^2}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

сходным образом можно определить математическое ожидание величины $z = y^2$

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}(y^2) = \frac{1}{A}\left(\int\limits_{0}^{1} x^4 dx + \int\limits_{1}^{A} x^2 dx\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{A^3}{3} - \frac{2}{15}\right)$$

теперь можно найти дисперсию величины y

$$\mathbf{Var}(y) = \mathbf{E}(y^2) - (\mathbf{E}(y))^2 = \frac{A^2}{12} - \frac{2}{15A} - \frac{1}{36A^2} + \frac{1}{6}$$

Критерии

0-2 – Предприняты попытки решения задачи, не приведшие к результату.

3-4 – Приведено решение, но допущены существенные ошибки (например, в формулах для моментов) или даны верные ответы без объяснения.

5-6 – Верно решена лишь часть задачи

7-8 – Правильный ход решения (любым методом), при незначительных ошибках (например, ошибке при вычислении дисперсии, при правильных формулах и методе решения).

9-10 – Правильное решение (любым методом) и правильный ответ, при незначительных описках .

Задача 4

Дана матрица M вида
$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$
где $1 > a > b > 0$. Докажите, что $\mathrm{Tr}\,(M^n) > 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Решение

Прежде всего найдем собственные числа матрицы M. Собственные числа этой матрицы есть $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = a-b$ (это можно установить как непосредственно находя корни характеристического уравнения, так и заметив, что матрица M–стохастическая). Соответственно собственные числа матрицы M^n есть $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1^n = 1$ и $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2^n = (a-b)^n$. Заметим, что $\mathrm{Tr}\,(M^n) = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 = 1 + (a-b)^n$. Следовательно, в силу условий задачи $\mathrm{Tr}\,(M^n) > 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

Критерии

0-2 – Предприняты попытки решения задачи, не приведшие к результату.

3-5 – Приведено доказательство, но допущены существенные ошибки (например, в формулах для следа матрицы или собственных чисел)

6-7 – Приведено верное доказательство, но опущены некоторые существенные для доказательства переходы .

8-10 – Верное доказательство, при незначительных описках или недочетах .

Задача 5

Докажите неравенство
$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\cos x} < \ln 2.$$

Решение

Разложение $\cos(x)$ в ряд Тейлора имеет вид:
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots .$$
Данный ряд сходится при всех x и является знакочередующимся рядом Лейбница. Следовательно, справедливо неравенство
$$\cos(x) > 1 - x^2/2, \qquad x \neq 0.$$
Таким образом, применяя теорему об интегрирование неравенств, получаем
$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\cos x} < \int_0^1 \frac{x\,dx}{1 - x^2/2} = \int_0^1 \frac{d(x^2)}{2 - x^2} = -\ln|2 - x^2|\,\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Критерии

0-2 – Абитуриентом предприняты попытки решения задачи.

3-5 – Приведено решение, но оно не верно или не достаточно объяснено. Например, присутствуют ошибки при преобразовании и оценке интеграла.

6-7 – Правильное решение, но допущены неточности в обосновании. Например, абитуриент применил оценку для косинуса без какого-либо обоснования.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках.

Задача 6

Найти состоятельную точечную оценку $\hat{p}$ параметра p геометрического распределения. Является ли смещенной оценка $\frac{1}{\hat{p}}$ для параметра $\frac{1}{p}$?

Решение:

Геометрическое распределение задается формулой $P\left(X=n\right) = q^{n-1}p$. Если имеются наблюдения $k_1, k_2, ..., k_n$, тогда составляя функцию максимального правдоподобия и максимизируя ее логарифм получаем состоятельную оценку:

$$P\left(k_1\right) P\left(k_2\right) ...P\left(k_n\right) = q^{k_1+k_2+...+k_n-n}p^n = q^{n\left(\bar{k}-1\right)}p^n \underset{p}{\to} \max$$

$$n\left(\bar{k}-1\right)\ln q + n\ln p \underset{p}{\to} \max$$

$$-\left(\bar{k}-1\right)\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} = 0$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{k}}$$

Составляя оценку максимального правдоподобия для параметра $\frac{1}{p}$ аналогично получаем оценку $\bar{k} = \frac{1}{\hat{p}}$. Ее смещение равно нулю, поскольку по свойству геометрического распределения $E\left(\bar{k}\right) = \frac{1}{p}$.

Критерии

Каждый пункт оценивается не более чем на 5 баллов

0-3 – Предприняты попытки решения задачи, не приведшие к результату, или верный ответ без достаточного обоснования

4-5 – Верное решение (любое) с незначительными недостатками

Задача 7

Найдите наименьшее расстояние от точки $A(0,1)$ до параболы $y = x^2$.

Решение

Расстояния от точки $A(0,1)$ до параболы — это минимальное расстояние от точки A до точек графика параболы, где минимум берется по всем точкам параболы. Расстояние от A до точки графика параболы имеет вид:

$$d(x) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(x^2-1)^2} = \sqrt{x^4-x^2+1}.$$

Найдем экстремум функции d:

$$d'(x) = \frac{4x^3-2x}{2d(x)} = \frac{x(2x^2-1)}{d(x)}.$$

Стационарные точки: $x = 0$ и $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Несложно видеть, что минимум функции $d(x)$ достигается при $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Таким образом, расстояние от точки A до параболы равно

$$d = d(\pm 1/\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Критерии

0-2 – Абитуриентом предприняты попытки решения задачи.

3-5 – Приведено частичное решение. Например, абитуриент выписал формулу для расстояния от точки A до точек параболы, но не провел исследование на экстремум.

6-7 – Правильное решение, но допущены неточности в решении. Например, абитуриент допустил незначительные ошибки в решении задачи, которые не повлияли на общий ход решения.

8-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках.

Задача 8

В городе X. в связи со строительством новой АТС жителям выдают новые телефонные номера. Эти номера представляют собой последовательности длины n из конечного алфавита мощности A, причем любая последовательность длины n допустима, но все последовательности различны.Будем говорить, что две последовательности "t-похожи", если у них есть в точности одна общая подстрока длины t($t \geq 2$), а все остальные символы различны. Чему равна вероятность того, что для некоторого номера Z, выданного одному из пользователей, найдется m "t-похожих" , если номера получили M жителей?

Решение

Прежде всего рассчитаем число номеров "t-похожих" на номер Z. Всего существует $n - t$ возможных выборов подстрок, причем в случае каждой из $n - t$ подстрок символы, соответствующие подстроке совпадают с соответствующими символами Z, а все остальные символы отличаются (что, в частности, позволяет утверждать, что множества номеров, соответствующих различным подстрокам, не пересекаются). Общее число номеров "t-похожих" на данный, таким образом, равно $D = (n-t)\,(A-1)^{(n-t)}$. Процесс распределения оставшихся $M - 1$ номеров можно рассматривать, как выбор (без возвращения) $M - 1$ объекта из $A^n - 1$ объектов. Вероятность того, что из $M - 1$ выбранных таким образом номеров m будут обладать заданным свойством, при условии, что в исходном множестве номеров таким свойством обладали D номеров описывается гипергеометрическим распределением и равна

$$p_m = \frac{\binom{D}{m}\binom{A^n-1-D}{M-1-m}}{\binom{A^n-1}{M-1}} = \frac{\binom{(n-t)(A-1)^{(n-t)}}{m}\binom{A^n-1-(n-t)(A-1)^{(n-t)}}{M-1-m}}{\binom{A^n-1}{M-1}}$$

.

Критерии

0-2 – Предприняты попытки решения задачи, не приведшие к результату, или верный ответ без достаточного обоснования

3-6 – Допущена существенная ошибка (например, использовано биномиальное распределение вместо гипергеометрического)

7-8 – Правильный поход к решению, но допущены незначительные ошибки, которые не повлияли на общий ход решения.

9-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках.

Задача 9

Найдите все такие x, при которых выполняется

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2\cos^2(x) & \sin(2x) & \sin(2x) \\ \cos^2(x) & -\sin^2(x) & \sin^2(x) \end{vmatrix} = 1$$

Решение

Простейший (по мнению автора) способ решить эту задачу состоит в том, чтобы заметить, что

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2\cos^2(x) & \sin(2x) & \sin(2x) \\ \cos^2(x) & -\sin^2(x) & \sin^2(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2\cos(x)\cos(x) & 2\sin(x)\cos(x) & 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos^2(x) & -\sin^2(x) & \sin^2(x) \end{pmatrix}$$

При вычислении определителя множителю по второму столбцу и второй строке можно вынести

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2\cos^2(x) & \sin(2x) & \sin(2x) \\ \cos^2(x) & -\sin^2(x) & \sin^2(x) \end{vmatrix} = -2\cos(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(x) & -\sin(x) & \sin(x) \\ \cos^2(x) & \sin^2(x) & \sin^2(x) \end{vmatrix}$$

Нетрудно заметить, что определитель в правой части этого равенства это определитель Вандермонда. Учитывая, что

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

имеем

$$\begin{aligned} \det(M) &= -2\cos(x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(x) & -\sin(x) & \sin(x) \\ \cos^2(x) & \sin^2(x) & \sin^2(x) \end{vmatrix} = \\ &= -2\cos(x)\left(-\sin(x) - \cos(x)\right)\left(\sin(x) - \cos(x)\right)\left(2\sin(x)\right) = \\ &= -4\cos(x)\sin(x)\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) = \\ &= -2\sin(2x)\cos(2x) = -\sin(4x) \end{aligned}$$

Следовательно

$$\det(M) = -\sin(4x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

Критерии

0-2 – Предприняты попытки решения задачи, не приведшие к результату, или верный ответ без достаточного обоснования

3-6 – Допущена существенная ошибка в переходах или формулах

7-8 – Правильный поход к решению, но допущены незначительные вычислительные ошибки, которые не повлияли на общий ход решения.

9-10 – Правильное решение и правильный ответ при допущенных описках.

Задача 10

Случайный граф задан следующим образом: между любыми двумя из n вершин с вероятностью p проводится ребро. Определим множество вершин такого графа V. Треугольником называется цикл длины 3 т.е. любая тройка вершин v_i, v_j, v_k ($v_i \in V, v_j \in V, v_k \in V, i \neq j, j \neq k$), таких, что каждая из них соединена ребром с двумя другими. Чему равно математическое ожидание числа треугольников в случайном графе с n вершинами?

Решение

Обозначим за T множество всех неупорядоченных троек индексов, соответствующих различным треугольникам. Мощность этого множества $|T| = \binom{n}{3}$. Введем кроме того, индикаторную функцию $I_\triangle$ на тройках $\tau = \{i, j, k\}$, которая принимает значения 1 если вершины $\{v_i, v_j, v_k\}$ образуют треугольник и 0 в противном случае. Вероятность того, что все вершины тройки окажутся соединены ребрами равна $\tilde{p} = p^3$.Искомое среднее равно

$$\bar{N}_\Delta = \mathop{\mathbf{E}}_{\tau \in T}(I_\triangle) = |T|p^3 = \binom{n}{3}p^3$$

Критерии

0-2 – Предприняты попытки решения задачи, не приведшие к результату, или верный ответ без достаточного обоснования

3-6 – Допущена существенная ошибка (например,использована неверная формула для определения числа всевозможных треугольников)

7-9 – Правильный решение, но допущены незначительные ошибки и/или описки.

10 – Правильное решение и верный ответ.

Задача 11

Шесть возможно несимметричных монет подбрасываются 100 раз. Результаты испытаний заданы в таблице:

Число гербов \Number of heads	0	1	2	3	4	5	6
Частота\ Observed Number of Outcomes	2	10	16	42	18	9	3

Используя критерий χ^2 проверить гипотезу о распределении числа гербов по биномиальному закону с параметрами 6 и 0,5 при 5% уровне значимости. Таблица критических значений для критерия χ^2 и различного числа степеней свободы ν при заданном уровне значимости приведена ниже

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\chi^2_{0,05}$	3.841	5.991	7.815	9.488	11.070	12.592	14.067	15.507	16.919

Решение

Находим ожидаемые частоты $np_i = 100C_6^i \frac{1}{2^6}$и записываем их в таблицу:

Число гербов	0	1	2	3	4	5	6
Частота	2	10	16	42	18	9	3
Ожидаемая частота	1,56	9,38	23,44	31,25	23,44	9,38	1,56

Условие корректного применения критерия Пирсона нарушено $np_i > 5$. Поэтому объединим события с малой частотой, например, крайние в таблице и получим новую таблицу:

Число гербов	0-1	2	3	4	5-6
Частота	12	16	42	18	12
Ожидаемая частота	10,94	23,44	31,25	23,44	10,94

Находим значения статистики и критическое значение для уровня значимости 0,05

$$\chi^2 = \frac{(12-10,94)^2}{10,94} + \frac{(16-23,44)^2}{23,44} + \frac{(42-31,25)^2}{31,25} + \frac{(18-23,44)^2}{23,44} + \frac{(12-10,94)^2}{10,94} = 7,53$$

$$\chi^2_{cr} = \chi^2_{0,05}(4) = 9,488$$

Поскольку $\chi^2 < \chi^2_{cr}$ первоначальная гипотеза о распределении числа гербов по биномиальному закону с параметрами 6 и 0,5 не отвергается (в приближенном виде).

Критерии

0-2 – Предприняты попытки решения задачи, не приведшие к результату, или верный ответ без достаточного обоснования

3-6 – Неверное или некорректное применение критерия, ошибочный ответ

7-8 – Правильное решение,допущены арифметические ошибки, не повлиявшие на правильность ответа

9-10 – Незначительные ошибки или описки

Задача 12

С помощью суперпозиции из функции алгебры логики f можно получить константы 0 и 1. Доказать, что функция f образует полную систему.

Решение.

В силу замкнутости предполных классов относительно операции суперпозиции нетрудно видеть, что f не принадлежит классам T_0, T_1 и S. Из того факта, что функция не сохраняет 0 и 1 следует, что функция f не принадлежит классу монотонных функций. Остается рассмотреть принадлежность классу линейных функций. Предположим, что f является линейной. Так как она не является самодвойственной, то в ней должно быть четное число существенных переменных. Кроме того, свободный член в полиноме Жегалкина указанной функции должен быть равен 1, так как она не сохраняет 0. Следовательно, на единичном наборе указанная функция должна принимать значение 1, что противоречит тому, что функция не принадлежит T_1. Получаем, что f - нелинейная функция. В итоге, по теореме Поста, f образует полную систему.

Критерии:

0-2 – попытка решения без использования теоремы Поста, которая не привела к правильному решению.

3-5 – приводится теорема Поста и проводится анализ принадлежности функции f предполным классам, но этот анализ содержит ошибки или не является полным.

6-7 –в доказательстве есть один необоснованный шаг.

8-10 – приведено корректное доказательство, все шаги обоснованы, допущены небольшие описки.

Задача 13

Доказать, что дополнение планарного графа на n вершинах непланарно при $n \geqslant 9$

Решение.

Обозначим через q и r - число ребер и число граней в некотором планарном графе, соответственно. По общей теореме Эйлера для любого планарного графа выполняется неравенство:

$$n - q + r \geqslant 2. \tag{1}$$

Так как каждая грань графа содержит не менее трех ребер и при подсчете ребер, которые входят в грани графа каждое ребро учитывается дважды, то для любого планарного графа верно следующее неравенство:

$$r \leqslant \frac{2}{3}q. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2), получаем, что для любого планарного графа выполняется неравенство:

$$n - \frac{1}{3}q \geqslant 2. \tag{3}$$

Пусть теперь q' - число ребер в исходном графе, q'' - число ребер в дополнении графа. Предположим, что дополнение графа также является планарным, тогда выполняются следующие соотношения.

$$n - \frac{1}{3}q' \geqslant 2,$$
$$n - \frac{1}{3}q'' \geqslant 2,$$
$$q' = \frac{n(n-1)}{2} - q''.$$

Из указанных соотношений не трудно получить следующие неравенства:

$$q' \leqslant 3(n-2),$$
$$q' \geqslant \frac{n(n-3)}{2} + 6.$$

При $n \geqslant 9$ указанные соотношения несовместны, что приводит к тому, что исходное предположения было неверным. Утверждение доказано.

Критерии:

1-2 – приведено хотя бы одно корректное соотношение для планарного графа (формула Эйлера, связь между число граней и ребер планарного графа)

3-5 – предпринята попытка составить систему соотношений, но при этом не удалось связать между собой число граней и число ребер или устранить число связанных компонент в общей формуле Эйлера (число параметров больше полученных соотношений)

6-7 –получена система соотношений, которая позволяет доказать утверждение (неравенство для формулы Эйлера и соотношение между ребрами и гранями планарного графа).

8-10 – приведено корректное доказательство с обоснованием всех шагов, допущены небольшие описки.

Задача 14

Сколько существует функций алгебры логики f от n переменных таких, что система $A = \{f, \overline{f}\}$ не является полной.

Решение.

По теореме Поста система A не является полной, если полностью содержится в одном из классов T_0, T_1, S, L и M. Нетрудно видеть, что система может содержаться только в классах S и L (доказательство проводится простыми рассуждениями от противного). Следовательно, функция $f \in S \cup L$. Остается посчитать число таких функций. Число функций из классов S и L можно получить на основе базовых комбинаторных чисел, число функций в объединении получается при помощи метода включений и исключений **Ответ:** $2^{2^{n-1}} + 2^n$.

Критерии:

0-2 попытка решения без использования теоремы Поста, которая не привела к правильному решению.
3- приводится теорема Поста и проводится анализ принадлежности функции f предполным классам, но этот анализ содержит ошибки или не является полным.
6-7 правильно (с обоснованием) найден класс функций, удовлетворяющий требованиям условия, но число функций в классе найдено неверно.
8-10 число функций найдено верно, есть обоснование решения, присутствуют небольшие опечатки